# 5. EL MODELO ABIERTO DE LEONTIEF. MARCO TEORICO

## 5.1. EL MODELO ABIERTO DE LEONTIEF

A partir de una tabla input-output (TIO), que presenta las transacciones intersectoriales de forma muy detallada, puede configurarse el modelo denominado **de Leontief** (en honor del economista que lo desarrolló por vez primera) cuyo uso permite medir y analizar los posibles efectos que los cambios en unas magnitudes producen sobre otras.

Aquí nos centraremos en el análisis derivado del **modelo abierto**, en el que las variables relativas a la demanda final y al valor añadido se hacen exógenas. Si **X** es un vector que recoge las producciones de cada rama; **DF** es otro donde figuran las demandas finales; **V** está integrado por los valores añadidos; y **A** es una matriz de coeficientes que representa las proporciones en que los distintos factores productivos se utilizan para la producción de bienes y servicios (coeficientes técnicos), tendremos de forma muy simplificada:

$$X = AX + DF \quad \rightarrow \quad X = f_1 (A, DF)$$

$$X = A'X + V \quad \rightarrow \quad X = f_2 (A', V)$$

La utilización de este modelo permite responder a preguntas tales como:

— ¿cuánto debe aumentar la producción de cereales, de elaborados cárnicos o de vinos cuando crezca la demanda final de servicios de restauración una determinada cantidad ?

— ¿cuánto debe aumentar la producción de todas las ramas alimentarias si se incrementa la demanda final de conservas vegetales ?

— ¿cuánto debe aumentar la producción el sector pesquero si se incrementan todas las demandas finales de productos alimentarios ?

— ¿cuál es el aumento de producción que tiene lugar en todo el sistema productivo si el valor añadido del sector de ganadería de bovino sufre un incremento?

De otra parte, su versatilidad ofrece la posibilidad de dar respuestas con diferente nivel de detalle y de desagregación sectorial en función de lo detallados que figuran los datos que integran la TIO. No obstante, para no errar en las conclusiones derivadas de la utilización del modelo en este trabajo, hay que tener muy en cuenta algunas cuestiones:

a) Los coeficientes técnicos que indican la estructura de las interrelaciones productivas son **constantes**. Por lo tanto, se presupone que cada sector necesita unas proporciones fijas tanto de inputs intermedios suministrados como de inputs primarios.
b) Las relaciones entre variables tendrán un carácter **estático** en el tiempo. Solo podrían ser dinámicas si también lo fuesen los coeficientes técnicos, es decir, si supiéramos la evolución de los mismos con el transcurso del tiempo.

El Esquema 1, representación simplificada de una TIO, permite ver las relaciones entre el conjunto de notaciones que se utilizarán en las ecuaciones del modelo que a continuación se desarrolla. En él los subíndices **d** y **m** hacen referencia a la procedencia de los flujos (de producción interior o "doméstica" y de importación, respectivamente), y **t** al total de los anteriores. La leyenda sería como sigue:

## ESQUEMA 1

**Representación simplificada de una TIO**

| | Sector j | $\Sigma_j$ | CF | FC | EX | DF | EM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_{tij}$ | $OI_{ti}$ | $CF_{ti}$ | $FC_{ti}$ | $EX_{ti}$ | $DF_{ti}$ | $EM_{ti}$ |
| Sector i | $x_{dij}$ | $OI_{di}$ | $CF_{di}$ | $FC_{di}$ | $EX_{di}$ | $DF_{di}$ | $EM_{di}$ |
| | $x_{mij}$ | $OI_{mi}$ | $CF_{mi}$ | $FC_{mi}$ | $EX_{mi}$ | $DF_{mi}$ | $EM_{mi}$ |
| | $II_{tj}$ | | $CF_t$ | $FC_t$ | $EX_t$ | $DF_t$ | |
| $\Sigma_i$ | $II_{dj}$ | | $CF_d$ | $FC_d$ | $EX_d$ | $DF_d$ | |
| | $II_{mj}$ | | $CF_m$ | $FC_m$ | $EX_m$ | $DF_m$ | |
| V | $V_j$ | V | | | | | |
| X | $X_j$ | | | | | | |
| T | $T_j$ | | | | | | |
| MT | $MT_j$ | | | | | | |
| | $IVA_{tj}$ | | | | | | |
| IVA | $IVA_{dj}$ | | | | | | |
| | $IVA_{mj}$ | | | | | | |
| R | $R_j$ | | | | | | |

| | |
|---|---|
| $x_{ij}$ | Flujo del sector i (suministrador) al sector j (utilizador). |
| $OI_i = \Sigma_j x_{ij}$ | Total de flujos suministrados por el sector i al conjunto del sistema productivo (outputs intermedios de i). |
| $II_j = \Sigma_i x_{ij}$ | Total de flujos utilizados por el sector j procedentes de todo el sistema productivo (inputs intermedios de j). |
| $V_j$ | Valor añadido bruto (a precios de mercado) del sector j. |
| $V = \Sigma_j V_j$ | Valor añadido bruto de todo el sistema productivo. |
| $X_j = II_{tj}+V_j$ | Producción efectiva del sector j (IVA excluido). |
| $T_j$ | Transferencias del sector j con otros sectores productivos. |
| $MT_j$ | Importaciones totales productos sector j (IVA excluido). |
| $IVA_j$ | IVA que grava los productos del sector j. |
| $R_j = X_j+T_j+MT_j+IVA_j$ | Recursos totales de productos del sector j. |
| $CF_i$ | Consumo final interior de productos del sector i. |
| $FC_i$ | Formación bruta de capital de productos del sector i. |
| $EX_i$ | Exportaciones de productos del sector i. |
| $DF_i = CF_i+FC_i+EX_i$ | Demanda final de productos del sector i. |
| $EM_i = OI_i+DF_i$ | Empleos de productos del sector i. |

Los equilibrios entre recursos y empleos exigen, además, las siguientes igualdades:

| | |
|---|---|
| $EM_{tj} = R_j = X_j + T_j + MT_j + IVA_{tj}$ | Distribución de recursos del sector j (IVA incluido) |
| $EM_{dj} = X_j + T_j + IVA_{dj}$ | Producción distribuida de productos de origen nacional del sector **j** (IVA incluido) |
| $EM_{mj} = MT_j + IVA_{mj}$ | Distribución de productos importados sector **j** (IVA incluido) |

## 5.2. DESARROLLO POR FILAS (MODELO DE DEMANDA)

La TIO puede desarrollarse por filas a nivel interior (subíndice **d**) o a nivel total (subíndice **t**), siendo las ecuaciones genéricas respectivas:

$$EM_{di} = x_{di1} + ... + x_{din} + DF_{di}$$
$$EM_{ti} = x_{ti1} + ... + x_{tin} + DF_{ti}$$

donde **n** es el número de ramas productivas consideradas.

Teniendo en cuenta lo señalado en el epígrafe anterior:

$$X_i + T_i = \sum_j x_{dij} + (DF_{di} - IVA_{di}) \qquad (1)$$
$$X_i + T_i = \sum_j x_{tij} + (DF_{ti} - IVA_{ti}) - MT_i \qquad (2)$$

Si definimos la **demanda final neta** como la demanda final sin IVA[14]:

---

[14] Hay que corregir la demanda final para igualar la producción interior distribuida según los recursos (columnas), que no incorpora el IVA, con la producción interior empleada (filas), que sí lo incorpora. Recuérdese que el IVA que grava los productos se concentra básicamente en la demanda final.

Este ajuste de la demanda final para pasarla a neta es distinta a la que Pulido y Fontela (1993) proponen. Según estos autores la corrección debería incluir también las transferencias ($T_i$) y las importaciones totales ($MT_i$), en su caso. Respecto a las transferencias, se sabe ciertamente que corrigen a la producción efectiva para pasarla a distribuida; pero no se conoce con certeza qué parte de ellas se distribuye por la demanda intermedia o por la final. Si se corrige sólo la demanda final con todas las transferencias puede darse el caso de que actividades con escasas o nulas ventas a la demanda final, pero con transferencias importantes (como es el de bastantes actividades agrarias que fundamentalmente producen materias primas para la in-

$$DFN_{di} = DF_{di} - IVA_{di}$$
$$DFN_{mi} = DF_{mi} - IVA_{mi}$$
$$DFN_{ti} = DFN_{di} + DFN_{mi} = DF_{ti} - IVA_{ti}$$

siendo, evidentemente, $DF_{ti} = DF_{di} + DF_{mi}$ e $IVA_{ti} = IVA_{di} + IVA_{mi}$ podemos escribir (1) y (2) de la forma siguiente:

$$X_i + T_i = \sum_j x_{dij} + DFN_{di} \qquad (3)$$
$$X_i + T_i = \sum_j x_{tij} + (DFN_{ti} - MT_i) \qquad (4)$$

Si definimos los **coeficientes técnicos**:

$$a_{dij} = x_{dij} / X_j \quad ; \quad a_{tij} = x_{tij} / X_j \quad ; \quad a_i = T_i / X_i$$

podemos expresar las ecuaciones (3) y (4) de la forma:

$$X_i + a_i X_i = \sum_j a_{dij} X_j + DFN_{di}$$
$$X_i + a_i X_i = \sum_j a_{tij} X_j + (DFN_{ti} - MT_i)$$

Los sistemas de ecuaciones pueden escribirse de forma matricial:

$$X + \hat{a}X = A_d X + DFN_d \qquad (5)$$
$$X + \hat{a}X = A_t X + (DFN_t - MT) \qquad (6)$$

donde:

| | |
|---|---|
| $\hat{\mathbf{a}}$ | es la matriz diagonalizada de $a_i$ |
| **X** | es el vector de producciones efectivas |
| $\mathbf{A_d}$ **y** $\mathbf{A_t}$ | son las matrices de coeficientes técnicos $a_{dij}$ y $a_{tij}$, respectivamente |
| $\mathbf{DFN_d}$ **y** $\mathbf{DFN_t}$ | son los vectores de demandas finales netas, interior y total respectivamente. |
| **MT** | es el vector de importaciones totales. |

Operando en (5) y (6) se deduce:

$$X = (I + \hat{a} - A_d)^{-1} DFN_d = B_d DFN_d \qquad (7)$$
$$X = (I + \hat{a} + A_t)^{-1} (DFN_t - MT) = B_t (DFN_t - MT) \qquad (8)$$

---

dustria), tuviesen unas demandas netas negativas, lo que no tendría ningún significado económico al realizar análisis posteriores.

Respecto a las importaciones totales, tan sólo una parte de ellas se incorpora a la demanda final, por lo que hacer la corrección con la fracción que no le afecta (importaciones para consumos intermedios) no tiene sentido. Siguiendo el razonamiento anterior, en el caso de actividades de escasa demanda final pero cuyos productos se importan mucho para usos industriales, también se produciría una demanda final neta negativa sin interpretación económica en análisis posteriores.

donde $\mathbf{B_d}$ y $\mathbf{B_t}$ son las matrices inversas cuyos elementos genéricos respectivos son $\mathbf{b_{dij}}$ y $\mathbf{b_{tij}}$.

Desarrollando los sistemas de ecuaciones (7) y (8) para el sector fila **i** tendremos:

$$X_i = \sum_j b_{dij}\, DFN_{dj} \qquad (9)$$

$$X_i = \sum_j b_{tij}\, (DFN_{tj} - MT_j) \qquad (10)$$

Las DFN y MT pueden definirse en función de $DF_t$ de la forma siguiente:

$$DFN_{dj} = \frac{DFN_{tj} - DFN_{mj}}{DFN_{tj}} \cdot \frac{DFN_{tj}}{DF_{tj}} \cdot DF_{tj} = (1-m_j) \cdot s_j \cdot DF_{tj} \qquad (11)$$

$$DFN_{tj} - MT_j = \frac{DFN_{tj} - MT_j}{DFN_{tj}} \cdot \frac{DFN_{tj}}{DF_{tj}} \cdot DF_{tj} = (1-n_j) \cdot s_j \cdot DF_{tj} \qquad (12)$$

donde: $\mathbf{m_j}$ es la relación $DFN_{mj}/DFN_{tj}$, que mide la proporción en que los productos importados del sector **j** integran la demanda final neta del mismo.

$\mathbf{n_j}$ es la relación entre importaciones totales de productos del sector **j**, $MT_j$, y demanda final neta total del mismo, $DFN_{tj}$.

$\mathbf{s_j}$ es la relación entre esta $DFN_{tj}$ y la demanda final total, $DF_{tj}$, de productos del sector **j**.

Sustituyendo (11) y (12) en (9) y (10):

$$X_i = \sum_j b_{dij}\, (1-m_j)\, s_j\, DF_{tj} = \sum_j z_{dij}\, DF_t \qquad {}_j(13)$$

$$X_i = \sum_j b_{tij}\, (1-n_j)\, s_j\, DF_{tj} = \sum_j z_{tij}\, DF_{tj}$$

Se definen así dos nuevas matrices inversas $\mathbf{Z_d}$ y $\mathbf{Z_t}$, de elementos genéricos respectivos

$$z_{dij} = b_{dij}\, (1-m_j)\, s_j$$

$$z_{tij} = b_{tij}\, (1-n_j)\, s_j$$

que no son sino los elementos $\mathbf{b_{ij}}$ de las matrices inversas originales corregidos en cada caso en función de los elementos de desajuste: las importaciones, $MT_j$, y el IVA que grava a los productos, $IVA_{tj}$. Con estas correcciones queda relacionada la producción de cualquier sector, $X_i$, con la demanda final total de cada uno de los sectores del sistema, $DF_{tj}$, a través de unas estructuras de coeficientes $Z_d$ ó $Z_t$ dadas.

Por otra parte, si se define $\mathbf{h_j} = DF_{tj} / DF_t$, proporción que supone la demanda final total de productos de **j** en la de todo el sistema económico ($DF_t = \sum_j DF_{tj}$), se tendrá:

$$X_i = DF_t \sum_j z_{dij} h_j = DF_t \sum_j p_{dij}$$
$$X_i = DF_t \sum_j z_{tij} h_j = DF_t \sum_j p_{tij}$$

con lo que se relaciona directamente a la producción de cada sector con la demanda final total de todo el sistema.

## 5.3. DESARROLLO POR FILAS PARA LAS IMPORTACIONES

Hasta el momento, el desarrollo del modelo se ha llevado a cabo con las subfilas **d** y **t**. Es interesante también desarrollarlo para la subfila **m** referente a las importaciones, siguiendo un proceso similar al utilizado anteriormente.

Las importaciones empleadas por el sistema económico de productos de un sector genérico **i** serán:

$$EM_{mi} = x_{mi1} +...+ x_{min} + DF_{mi} = MT_i + IVA_{mi}$$
$$MT_i = \sum_j x_{mij} + (DF_{mi} - IVA_{mi}) = \sum_j x_{mij} + DFN_{mi}$$

donde $DFN_{mi} = DF_{mi} - IVA_{mi}$ es la **demanda final neta** de productos importados del sector **i.**

Definiendo los coeficientes técnicos de importación como $a_{mij} = x_{mij} / X_j$ , se pueden expresar las importaciones $MT_i$:

$$MT_i = \sum_j a_{mij} X_j + DFN_{mi} \qquad (14)$$

El sumatorio $\sum_j a_{mij} X_j = OI_{mi}$ nos da las importaciones de productos del sector **i** utilizadas como consumos intermedios. A partir de (14) y teniendo en cuenta la ecuación (7) que expresa X en forma matricial, tendremos:

$$MT = A_m B_d DFN_d + DFN_m$$

sistema de ecuaciones que desarrollado sería:

$$MT_1 = \sum_i \sum_j a_{m1i} b_{dij} DFN_{dj} + DFN_{m1}$$
$$\vdots$$
$$MT_k = \sum_i \sum_j a_{mki} b_{dij} DFN_{dj} + DFN_{mk} \qquad (15)$$
$$\vdots$$
$$MT_n = \sum_i \sum_j a_{mni} b_{dij} DFN_{dj} + DFN_{mn}$$

La expresión (15) puede ponerse también, teniendo en cuenta (9), (11), (12) y (13):

$$MT_k = \Sigma_i \Sigma_j a_{mki} z_{dij} DF_{tj} + m_k s_k DF_{tk}$$

siendo:

$$OI_{mk} = \Sigma_i \Sigma_j a_{mki} z_{dij} DF_{tj} \qquad (16)$$

ecuación que cuantifica las importaciones para usos intermedios de productos del sector **k**, en función de las demandas finales totales de los distintos sectores productivos, y

$$DFN_{mk} = m_k s_k DF_{tk}$$

la que mide la demanda final neta de importación de productos del sector **k** en función de su demanda final total.

## 5.4. DESARROLLO POR COLUMNAS (MODELO DE OFERTA)

Las relaciones por **columnas** pueden expresarse de forma similar a lo descrito anteriormente. Para cualquier sector columna **j**, podrá escribirse:

$$X_j = II_{tj} + V_j = \Sigma_i x_{tij} + V_j$$

Si definimos $d_{tij} = x_{tij} / X_i$ , **coeficiente de distribución** (o de **mercado**) que mide la porción que de los productos del sector **i** es utilizada por el sector **j**, podrá escribirse:

$$X_j = \Sigma_i d_{tij} X_i + V_j$$

o en forma matricial para el conjunto de sectores:

$$X = XD_t + V$$

donde $D_t$ será la matriz de coeficientes $d_{tij}$, y X y V los vectores correspondientes a las producciones efectivas y a los VAB de los distintos sectores productivos.

Operando puede llegarse a :

$$X = V(I - D_t)^{-1} = V\ C_t \quad \text{, siendo} \quad C_t = (I - D_t)^{-1}$$

Desarrollando para el sector genérico **j**:

$$X_j = Z_i c_{tij} V_i \qquad (17)$$

en donde $c_{tij}$ es el elemento genérico de la matriz $C_t$. Esta expresión cuantifica el valor de la producción de cualquier sector **j** en función de los valores añadidos de todos los sectores productivos. Si la participación de cada sector **i** en el valor añadido de todo el sistema productivo la notamos por $\mathbf{t}_i = V_i / V$ , se tendrá:

$$X_j = V \sum_i c_{tij} \, t_i$$

ecuación que permite calcular cada producción sectorial en función del VAB de todo el sistema.